Devoir Maison : Comprendre la géométrie (et les mathématiques plus généralement)

La géométrie est une représentation de notre monde en version idéale : une droite existe en géométrie mais elle n'existe pas vraiment dans notre monde car tout a une épaisseur et rien n'est infini.
Les points, les droites, les segments et toutes les figures géométriques n'existent finalement que dans notre imagination mais ce monde imaginaire est aussi la seule façon de comprendre et manipuler notre monde réel car toute construction humaine évoluée a d'abord été réalisée géométriquement.
L'intérêt et la beauté de la géométrie se trouve dans sa perfection : un segment peut mesurer exactement 2 cm alors que dans la réalité, rien ne fait exactement 2 cm.
Dans le monde mathématique, les choses sont soit vraies soit fausses : "$1{,}3 \times 3 = 4$" est faux mais "$1{,}3 \times 3 \simeq 4$" est vrai. On dit que les mathématiques sont une science exacte.

L'objectif des mathématiques est de trouver des vérités mathématiques qui seront d'autant plus intéressantes si elles correspondent à des choses importantes de la réalité.
Ces vérités doivent être certaines : il ne doit pas y avoir de doute, toute nouvelle vérité doit être soigneusement expliquée et il est hors de question par exemple d'affirmer qu'un angle est droit sous prétexte qu'une équerre semble bien se positionner dessus.
Pour prouver une nouvelle vérité, il faut l'expliquer comme étant la conséquence d'autres vérités déjà expliquées.

Dans cette recherche de vérité se pose alors une question fondamentale : quelles sont les toutes premières vérités desquelles il faudrait partir pour en prouver d'autres ?
Ces vérités élémentaires s'appellent des axiomes : elles sont les seules qu'on considère vraies sans explication. Au 3^{e} siècle avant JC, Euclide avait déjà proposé des axiomes comme par exemple "étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à la première".

En ce qui nous concerne et pour ne pas rentrer dans des considérations trop théoriques, "nos axiomes" sont les propriétés D1, D3, SA2 et SC2. Par ailleurs, il arrive souvent que, pour des raisons de temps, d'intérêt ou d'impossibilité, le professeur ne prouve pas tous les résultats qu'il annonce.

Concrètement, les vérités dont disposent les élèves sont les définitions, propriétés et théorèmes qui ont été écrites un jour dans leurs cours à un moment de leurs scolarités.

Remarque : Il n'y a pas de réelle différence entre "propriété" et "théorème" si ce n'est qu'un théorème est censé être une propriété plus importante que les autres.

Exercice : Sur la feuille "Propriétés, théorèmes et définitions de géométrie au collège" surligne en vert les références de ce que tu as déjà vu ou **de ce que tu es censé** avoir déjà vu.

Par la suite, tu surligneras au fur et à mesure les nouvelles connaissances que tu apprendras en cours.

Règles du jeu de la géométrie : Pour démontrer (signifie "prouver" en mathématiques) quelque chose, on part des hypothèses* (signifie "ce qu'on sait au départ" en mathématiques), on utilise des définitions ou des propriétés qu'on est censé connaître (celles qui sont donc surlignées) pour trouver d'autres vérités qu'on réutilise jusqu'à obtenir la vérité demandée.
* on peut parfois rajouter des choses à la figure mais il faut alors bien préciser ce qu'elles sont.

<u>Propriétés, théorèmes et définitions de géométrie au collège</u> (*Les niveaux sont donnés à titre indicatif*)

(*en italique : ne fait pas partie du socle commun ou n'est plus au programme*)

NOM Prénom classe : . . . .

ANGLE

A1	5^e	Dans un triangle, la somme des mesures des angles vaut 180°.
A2	5^e	Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
A3	*5^e*	*Deux angles alternes-internes (ou deux angles correspondants) par rapport à deux droites parallèles ont la même mesure.*
A4	*5^e*	*Si deux angles alternes-internes (ou deux angles correspondants) par rapport à deux droites ont la même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.*
A5		*<u>Théorème de l'angle au centre</u> : La mesure de l'angle au centre est le double de celui de l'angle inscrit qui intercepte le même arc.*
A6		*<u>Théorème de l'angle inscrit</u> : Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.*

CARRÉ

C	6^e	<u>Définition</u> : Un **carré** est à la fois un rectangle et un losange.

DROITES

D1	6^e	Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
D2	6^e	Si deux droites sont parallèles à une même droite, alors ces deux droites sont parallèles.
D3	6^e	Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors ces deux droites sont parallèles.
D4	*6^e*	*<u>Définition</u> : La **distance d'un point à une droite** est la longueur du segment qui relie ce point à cette droite perpendiculairement.*
D5		*<u>Définition</u> : La **tangente** en M à un cercle de centre O et de rayon [OM] est la droite qui est perpendiculaire à (OM) et qui passe par M.*

LOSANGE

L1	6^e	<u>Définition</u> : Un **losange** est un quadrilatère qui a ses côtés de même longueur.
L2	5^e	Un losange a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.
L3	5^e	Un losange a ses côtés opposés parallèles.
L4	6^e/5^e	Un losange a ses angles opposés de même mesure.
L5	6^e	Un losange a ses angles consécutifs supplémentaires.
L6	6^e	Un losange a ses diagonales perpendiculaires.
L7		*Les diagonales d'un losange sont des bissectrices de ses angles.*
L8	6^e	Les deux diagonales d'un losange sont des médiatrices l'une de l'autre.
L9	5^e	Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.
L10	5^e	Un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires est un losange.

MEDIATRICE

M1	6^e	<u>Définition</u> : La **médiatrice** d'un segment est la droite qui coupe ce segment perpendiculairement et en son milieu.
M2	6^e	Un point qui se trouve sur la médiatrice d'un segment à égale distance des extrémités de ce segment.
M3	6^e	Un point qui est à égale distance des extrémités d'un segment est sur la médiatrice de ce segment.

BISSECTRICE

B1		*<u>Définition</u> : La **bissectrice** d'un angle est la demi-droite d'origine le sommet de l'angle et qui coupe cet angle en deux angles de même mesure.*
B2		*Un point qui se trouve sur la bissectrice d'un angle à égale distance des côtés de cet angle.*

PARALLELOGRAMME

P1	5^e	<u>Définition</u> : Un **parallélogramme** est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles.
P2	5^e	Un parallélogramme a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.
P3	5^e	Un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur.
P4	5^e	Un parallélogramme a ses angles opposés de même mesure.
P5	5^e	Un parallélogramme a ses angles consécutifs supplémentaires.
P6	5^e	Un quadrilatère qui a ses diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme.
P7	5^e	Un quadrilatère (non croisé) qui a ses côtés opposés de même longueur est un parallélogramme.
P8	5^e	Un quadrilatère (non croisé) qui a une paire de côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme.

RECTANGLE

RC1	6^e	<u>Définition</u> : Un **rectangle** est un quadrilatère qui a ses angles droits.
RC2	6^e	Un rectangle a ses côtés opposés parallèles.
RC3	6^e	Un rectangle a ses côtés opposés de même longueur.
RC4	5^e	Un rectangle a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.
RC5	6^e	Un rectangle a ses diagonales de même longueur.
RC6	6^e	Un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle.
RC7	5^e	Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.
RC8	5^e	Un parallélogramme qui a ses diagonales de même longueur est un rectangle.

REPRODUCTION

RP1	5^e	<u>Définition</u> : L'**échelle** d'une reproduction est $e = \dfrac{\text{longueur sur figure reproduite}}{\text{longueur sur figure réelle}}$
RP2	5^e	Après une reproduction à l'échelle e, les longueurs sont multipliées par e.
RP3	3^e	Après une reproduction à l'échelle e, les aires sont multipliées par e^2.
RP4	3^e	Après une reproduction à l'échelle e, les volumes sont multipliés par e^3.

SYMETRIE AXIALE

SA1	6^e	<u>Définition</u> : L'image d'un point M par la **symétrie d'axe** d est le point M' tel que la droite d soit la médiatrice du segment [MM'].
SA2	6^e	La symétrie axiale conserve : la nature des figures, les longueurs, les aires, les périmètres, les mesures des angles, le parallélisme et la perpendicularité.

SYMETRIE CENTRALE

SC1	5^e	<u>Définition</u> : L'image d'un point M par la **symétrie de centre** O est le point M' tel que O soit le milieu du segment [MM'].
SC2	5^e	La symétrie centrale conserve : la nature des figures, les longueurs, les aires, les périmètres, les mesures des angles, le parallélisme, la perpendicularité.
SC3	5^e	Le symétrique d'une droite par rapport à un centre est une droite parallèle.

TRIANGLE

T1	6^e	<u>Définition</u> : Un **triangle isocèle** est un triangle qui a deux côtés de même longueur.
T2	6^e	Un triangle isocèle a deux angles de même mesure.
T3	6^e	Si un triangle a deux angles de même mesure, alors ce triangle est isocèle.
T4	6^e	<u>Définition</u> : Un **triangle équilatéral** est un triangle qui a ses côtés de même longueur.
T5	5^e	Un triangle équilatéral a ses angles qui mesurent 60°.
T6	5^e	Si un triangle a ses angles qui mesurent 60°, alors ce triangle est équilatéral.
T7	4^e	<u>Théorème de Pythagore</u> : Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
T8	4^e	<u>Théorème réciproque de Pythagore</u> : Dans un triangle ABC, si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.
T9		*Dans un triangle rectangle, le milieu de hypoténuse est à égale distance des sommets de ce triangle.*
T10		*Si M est un point du cercle de diamètre [AB], alors le triangle ABM est rectangle en M.*
T11	4^e/3^e	<u>Théorème de Thalès</u> : Dans un triangle ABC, si M est un point de (AB) et N un point de (AC) et que (MN) est parallèle à (BC) alors on a : $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$
T12	3^e	<u>Théorème réciproque de Thalès</u> : Si les points A, B, M et A, C, N sont alignés dans le même ordre et que $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
T13		*Les médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point appelé le **centre du cercle circonscrit** à ce triangle.*
T14		*<u>Définition</u> : Dans un triangle, une **médiane** est une droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé.*
T15		*Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé le **centre de gravité** de ce triangle.*
T16	*6^e/5^e*	*<u>Définition</u> : Dans un triangle, une **hauteur** est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.*
T17		*Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé l'**orthocentre** de ce triangle.*
T18		*Les bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point appelé le **centre du cercle inscrit** à ce triangle.*
T19		*<u>Définition</u> : Dans un triangle, une **droite des milieux** est une droite qui passe les milieux de deux côtés de ce triangle.*
T20		*Dans un triangle, une droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un autre côté est une droite des milieux.*
T21		*Dans un triangle ABC, la droite des milieux qui coupe [AB] et [AC] passe par les milieux de ces segments.*
T22		*Dans un triangle ABC, la droite des milieux qui coupe [AB] et [AC] est parallèle à (BC).*
T23		*Dans un triangle ABC, si la droite des milieux coupe [AB] en M et [AC] en N, alors on a : $BC = 2 \times MN$.*
T24	4^e	*<u>Définition</u> : Dans un triangle rectangle, le **cosinus** d'un angle est défini par :* $\cos = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$
T25	3^e	*<u>Définition</u> : Dans un triangle rectangle, le **sinus** d'un angle est défini par :* $\sin = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$
T26	3^e	*<u>Définition</u> : Dans un triangle rectangle, la **tangente** d'un angle est définie par* $\tan = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$
T27		*Pour tout nombre x, on a : $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ et $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$*

VOLUME, AIRE ET PÉRIMÈTRE

V1	6^e	$1\ L = 1\ dm^3$
V2	6^e	Le périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est : $\mathcal{P} = 2 \times L + 2 \times \ell = 2 \times (L + \ell)$
V3	6^e	*Le périmètre d'un cercle de rayon r est $\mathcal{P} = 2 \times \pi \times r$*
V4	6^e	L'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est : $\mathcal{A} = L \times \ell$
V5	6^e	*L'aire d'un triangle de hauteur h et de base associée b est : $\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$.*
V6	6^e	*L'aire d'un disque de rayon r est $\mathcal{A} = \pi \times r \times r = \pi r^2$*
V7	5^e	*L'aire d'un parallélogramme de base b et de hauteur h est : $\mathcal{A} = b \times h$.*
V8	3^e	*L'aire d'une sphère de rayon r est : $\mathcal{A} = 4\pi r^2$*
V9	6^e	Le volume d'un parallélépipède rectangle de longueur L, de largeur ℓ et de hauteur h est : $\mathcal{V} = L \times \ell \times h$
V10	5^e	*Le volume d'un prisme droit de base $\mathcal{B}$ et de hauteur h est : $\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$*
V11	5^e	*Le volume d'un cylindre de base $\mathcal{B}$ et de hauteur h est : $\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$*
V12	4^e	Le volume d'une pyramide de base $\mathcal{B}$ et de hauteur h est : $\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$
V13	4^e	Le volume d'un cône de base $\mathcal{B}$ et de hauteur h est : $\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$
V14	3^e	Le volume d'une boule de rayon r est : $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \pi r^3$