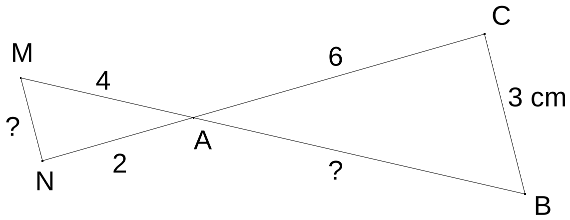
Chapitre : Thalès et agrandissements

I Les théorèmes de Thalès

a) Théorème directe

Théorème de Thalès (généralisée) : On considère un triangle ABC.
M est un point de (AB) et N un point de (BC).
Si (MN) et (BC) sont parallèles alors on a : $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$



(BC) // (MN)

Question : Calculer AB et MN.
Réponse : Les droites (BM) et (CN) se coupent en A et les droites (MN) et (BC) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$

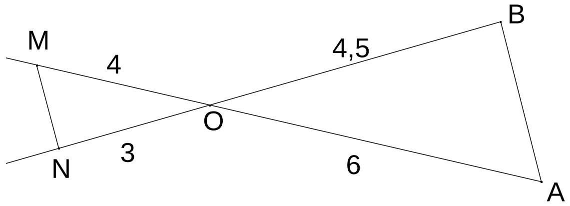
Donc $\frac{AB}{4} = \frac{6}{2}$ donc AB = $\frac{4 \times 6}{2}$ = 12 cm et $\frac{MN}{3} = \frac{2}{6}$ donc MN = $\frac{3 \times 2}{6}$ = 1 cm

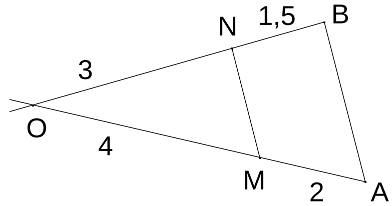
Remarques : – Le triangle ABC est un agrandissement par 3 du triangle ABC.
– On a aussi : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$: il faut choisir $\frac{\text{petit}}{\text{grand}}$ ou $\frac{\text{grand}}{\text{petit}}$ puis être cohérent.
– $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$ signifie que le point M est se situe aux $\frac{3}{4}$ de [AB] en partant de A.

b) Théorème réciproque

Théorème réciproque de Thalès :
Considérons des points A, O, M et B, O, N alignés dans le même ordre.
Si $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$ alors les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

Méthode pour savoir si deux droites sont parallèles : (entre guillemets ce qu'on écrit sur sa copie)





1°) « Les points A, O, M et B, O, N sont alignés dans le même ordre. »

2°) On écrit les fractions "centrales" de Thalès : « $\frac{OA}{OM} = \frac{6}{4}$ et $\frac{OB}{ON} = \frac{4,5}{3}$ »

3°) On calcule les produits en croix : « 6 × 3 = 18 et 4 × 4,5 = 18 »

4°) • si les produits en croix sont égaux, on écrit :

« Les produits en croix sont égaux donc les fractions sont égales donc $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}$

Les droites (MN) et (AB) sont donc parallèles d'après le théorème réciproque de Thalès. »

• si les produits en croix ne sont pas égaux, on écrit :

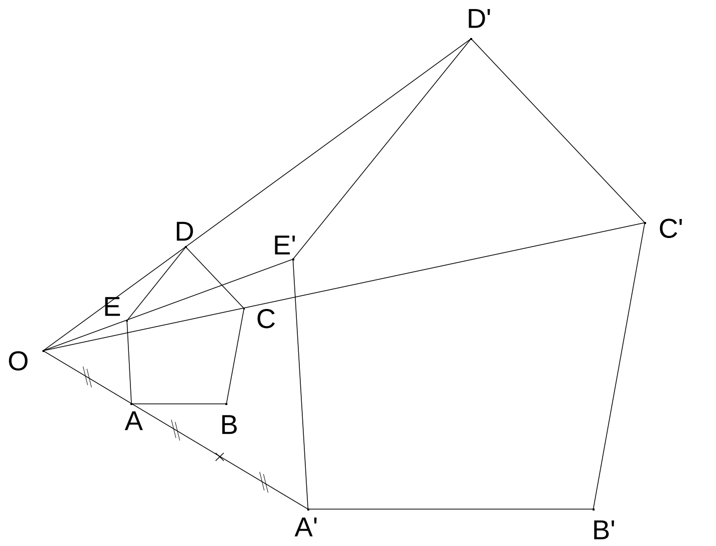
« Les produits en croix ne sont pas égaux donc les fractions ne sont pas égales donc $\frac{OA}{OM} \neq \frac{OB}{ON}$

Les droites (MN) et (AB) ne sont pas parallèles d'après le théorème de Thalès. »

II agrandissement – réduction

Le théorème de Thalès peut nous permettre de d'agrandir ou rétrécir une figure.

Ici, A'B'C'D'E' est un agrandissement par 3 de ABCDE.



<u>Définition</u> : L'<u>échelle</u> d'une figure reproduite est $e = \dfrac{\text{longueur sur la figure finale}}{\text{longueur sur la figure initiale}}$

Si e > 1, il s'agit alors d'un <u>agrandissement</u>.
Si e < 1, il s'agit alors d'une <u>réduction</u>.
Si e = 1, il s'agit d'une <u>reproduction en vraie grandeur</u>.

<u>Exemples</u> : A'B'C'D'E' est une reproduction de ABCDE à l'échelle $e = 3 = \dfrac{A'E'}{AE} = \dfrac{E'D'}{ED} = \ldots..$

Il s'agit donc d'un agrandissement car e > 1.

Inversement, ABCDE est une reproduction de A'B'C'D'E' à l'échelle $e = \dfrac{1}{3} = \dfrac{AE}{A'E'} = \dfrac{ED}{E'D'} = \ldots..$

Il s'agit donc d'une réduction car e < 1.

<u>Action de l'échelle sur la figure reproduite</u> : Suite à une reproduction d'une figure à l'échelle e :
1°) les longueurs sont multipliées par e
2°) les aires sont multipliées par e^2
3°) les volumes sont multipliés par e^3.
Autrement dit : $\ell' = e\,\ell$ $\mathcal{A}' = e^2\,\mathcal{A}$ et $\mathcal{V}' = e^3\,\mathcal{V}$

<u>Exemple</u> : Une pyramide de hauteur h = 6 m, de base mesurant B = 5 m² a un volume $V = \dfrac{B \times h}{3} = \dfrac{6 \times 5}{3} = 10 \text{ m}^3$.

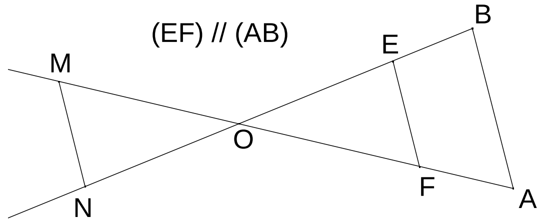
La même pyramide 2 fois plus grande, donc reproduite à l'échelle e = 2, a pour dimensions :

sa hauteur est $h' = e \times h = 2 \times 6 = 12$ m
sa base mesure $B' = e^2 \times B = 2^2 \times 5 = 40$ m²
son volume est de $V' = e^3 \times V = 2^3 \times 10 = 80 \text{ m}^3$

<u>Remarque</u> : Si la petite pyramide pesait 3 t, alors la grande pèsera $2^3 \times 3 = 24 \text{ m}^3$ car **la masse est proportionnelle aux volumes**.

<u>Penser à</u> : est-ce la taille d'une personne qui fait son poids ?
Si on dit qu'une personne est grosse, on dit qu'elle a un volume important mais on pense qu'elle pèse lourd.

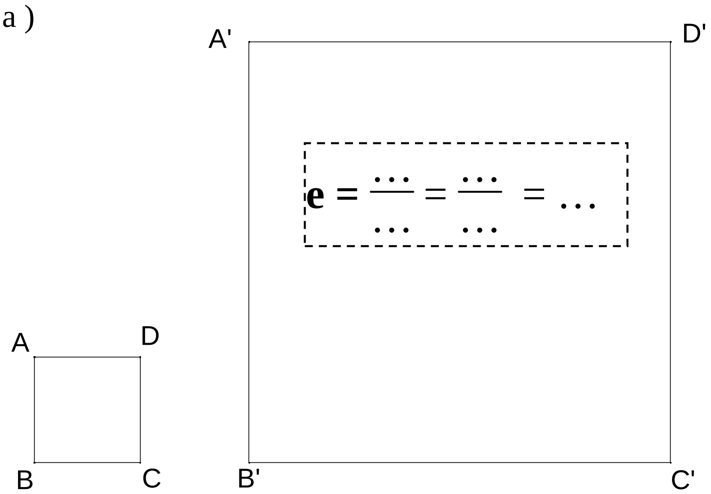
Exercice 1 : a) Applique le théorème de Thalès vue en 4e dans le triangle OAB et détermine les fractions égales.
b) Le segment [MN] est le symétrique du segment [EF] par rapport au centre O. Que dire de ces segments ?
Trouve trois fractions égales qui utilisent les points O, A, B, M et N.



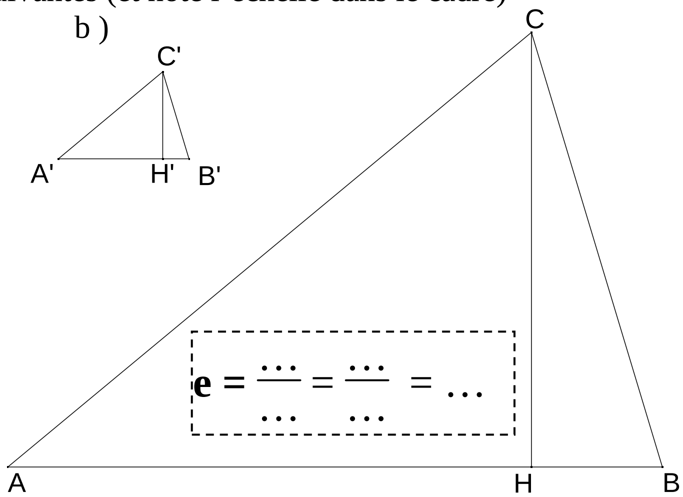
Exercice 2 : a) En utilisant le quadrillage, trace judicieusement un segment [AB] avec un point M dessus tel que $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{5}$. Même question avec $\frac{AM}{AB} = \frac{7}{10}$ puis $\frac{BM}{BA} = \frac{4}{5}$.
c) Trace un segment [AB] sans utiliser le quadrillage de ta feuille.
En n'utilisant que les instruments de géométrie, place un point M sur [AB] qui soit situé aux deux tiers de [AB] en partant de A.

Exercice 3 : Trouve l'échelle de reproduction des figures suivantes (et note l'échelle dans le cadre)

a)



b)



c) A France miniature, la tour Eiffel est reproduite:elle mesure 10 m de haut alors qu'en réalité, elle fait 320 m.

Exercice 4 : Pour chacune des questions, il faut refaire complètement la figure.
a) Sans utiliser le quadrillage, trace un triangle ABC (pas trop grand) et place un point O à gauche de ABC.
Construis une reproduction de ABC à l'échelle e = 2 (centré en O).
b) reprend a) en plaçant cette fois-ci le point O à l'intérieur du triangle ABC et en prenant pour échelle e = 4.
c) reprend a) en plaçant cette fois-ci le point O à droite du triangle ABC et en prenant pour échelle e = 0,5.

Exercice 5 : Notons ℓ pour une longueur, $\mathcal{A}$ pour une aire et $\mathcal{V}$ pour un volume, r pour un rayon, h pour hauteur, $\mathcal{B}$ pour base et ajoutons « ' » pour dire s'il s'agit de la figure reproduite.
Exemple : Pour dire qu'après une reproduction à l'échelle e les longueurs sont multipliées par e, on écrit :

$\ell' = e \times \ell$ ou plus simplement $\ell' = e\ell$

a) Un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est reproduit à l'échelle e. Recopie et complète :
$\mathcal{A} = …$ L ' = … L $\ell' = …$ $\mathcal{A}' = … = … = … \mathcal{A}$
b) Un parallélépipède rectangle de longueur ℓ_1, largeur ℓ_2 et hauteur ℓ_3 est reproduit à l'échelle e.
Recopie et complète :
$\mathcal{V} = ...$ $\ell_1' = …$ $\ell_2' = …$ $\ell_3' = …$ $\mathcal{V}' = … = … = … \mathcal{V}$

c) Complète : Après une reproduction à l'échelle e, on a :

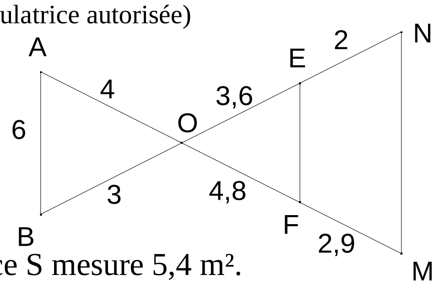
$\ell' = … \times \ell$	$\mathcal{A}' = … \mathcal{A}$	$\mathcal{V}' = … \mathcal{V}$

Exercice 6 : On reprend les notations usuelles comme dans l'exercice 5. ($\mathcal{P}$ désigne le périmètre)

a) Un carré de coté ℓ = 10 cm a été agrandi à l'échelle e = 5. Calcule $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, ℓ'.
b) Un disque de rayon r = 5 m est rétréci à l'échelle e = 0,1. Calcule $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{P}'$, r' à 0,1 près.
c) Sur une carte routière, la France est reproduite à l'échelle 1 cm : 10 km. Calcule l'échelle e puis $\mathcal{A}'$ sachant que la superficie de la France est d'environ $\mathcal{A}$ = 550 000 km².
d) Un cône de rayon 3 cm et de hauteur 10 cm est agrandi à l'échelle 3. Calcule $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ à 0,1 près.
e) La plus grand pyramide d'Egypte est celle de Kheops : elle est haute de 148 m et sa base est un carré de coté 233 m. Quel est le volume de la pyramide Kheops ? Et d'une reproduction de cette pyramide à l'échelle $\frac{1}{50}$?

Exercices pour préparer le contrôle (Calculatrice autorisée)

Exercice 1 : Exercice pour préparer au Brevet (7 points)

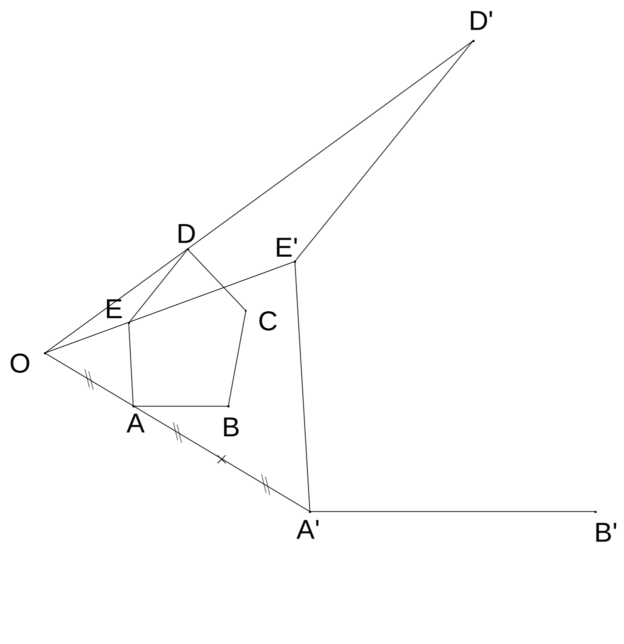


Exercice 2 : A propos de cette figure.
a) Prouve que les droites (AB) et (FE) sont parallèles.
b) Calcule EF.
c) Les droites (MN) et (EF) sont-elles parallèles ?

Exercice 3 : a) Avant un agrandissement à l'échelle e = 10, une surface S mesure 5,4 m².
Combien mesure t'elle après l'agrandissement ?
b) Une pyramide a une base de 6 cm² et une hauteur de 10 cm.
Calcule le volume de ce solide puis déduis-en le volume d'une pyramide 5 fois plus petite ?

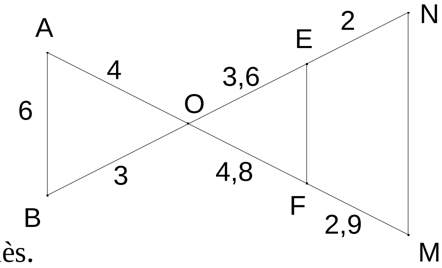
Exercice 4 : a) Trace un quadrilatère et place un point O à l'extérieur de celui-ci.
Fais un agrandissement centré en O de ce quadrilatère à l'échelle e = 4.
b) Trace un segment [AB] de 9 carreaux puis, en n'utilisant que la règle non graduée, l'équerre et le compas, place sur ce segment le point M situé à $\frac{5}{8}$ de AB en partant de A.

Connaître les formules de calcul des volumes (pyramide, cône, prisme, cylindre).



Correction des exercices de préparation au contrôle

Exercice 2 :



a) Les points A, O, F et B, O, E sont alignés dans le même ordre.

On a : $\frac{OA}{OF} = \frac{4}{4,8}$ et $\frac{OB}{OE} = \frac{3}{3,6}$

De plus : $4 \times 3,6 = 14,4$ et $4,8 \times 3 = 14,4$

Les produits en croix sont égaux donc les fractions sont égales, donc $\frac{OA}{OF} = \frac{OB}{OE}$

Les droites (AB) et (EF) sont donc parallèles d'après le théorème réciproque de Thalès.

b) Les droites (AF) et (BE) se coupent en O et les droites (AB) et (EF) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{OA}{OF} = \frac{OB}{OE} = \frac{AB}{FE}$

D'où : $\frac{EF}{6} = \frac{4,8}{4}$ donc $EF = \frac{6 \times 4,8}{4} = 7,2$ cm

c) Les points O, E, N et O, F, M sont alignés dans le même ordre.

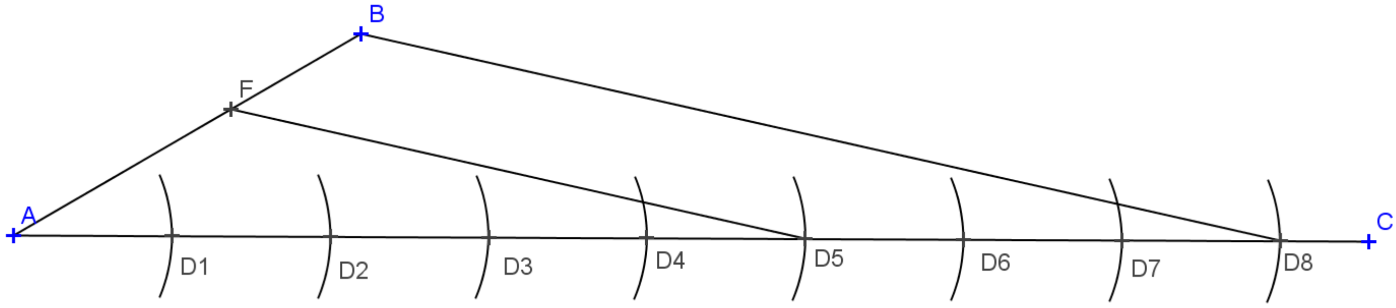
On a : $\frac{ON}{OE} = \frac{5,6}{3,6}$ et $\frac{OM}{OF} = \frac{7,7}{4,8}$

De plus : $5,6 \times 4,8 = 26,88$ et $3,6 \times 7,7 = 27,72$

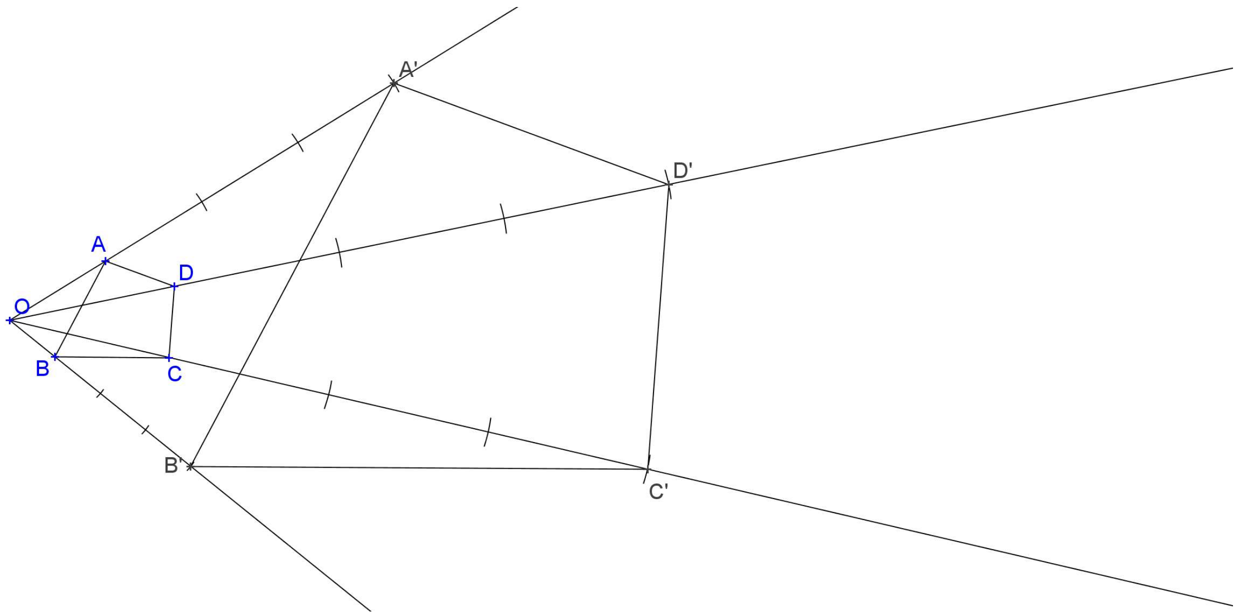
Les produits en croix ne sont pas égaux donc les fractions ne sont pas égales, donc $\frac{OA}{OF} \neq \frac{OB}{OE}$

Les droites (EF) et (MN) ne sont donc pas parallèles d'après le théorème de Thalès.

Exercice 3 : On reporte une longueur 8 fois sur un segment [AC] puis on trace la droite parallèle à (BC) qui passe par D5.



Exercice 4 :



Exercice 5 : a) Avant un agrandissement à l'échelle e = 10, une surface S mesure 5,4 m².
Elle après l'agrandissement elle mesure $A' = e^2A = 10^2 \times 5,4 = 540$ m²

b) Une pyramide a une base de 6 cm² et une hauteur de 10 cm a pour volume $V = \frac{B \times h}{3} = \frac{6 \times 10}{3} = 20$ cm^3

Après une réduction à l'echelle $e = \frac{1}{5} = 0,2$ le volume de la pyramide réduite est $V = e^3V = 0,2^3 \times 20 = 0,16$ cm^3